Aufgabe & Lösung

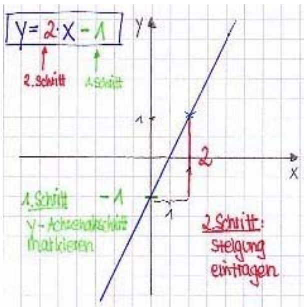
1. Zeichne den Grafen der Funktion.

a) g: y = 2 x - 1

(1) b=-1, also $S_y(0|-1)$ auf der y-Achse markieren.

(2) $m = 2 = \frac{+2}{+1}$

1 Einheit nach rechts (positive x-Richtung), 2 Einheiten nach oben (positive y-Richtung).

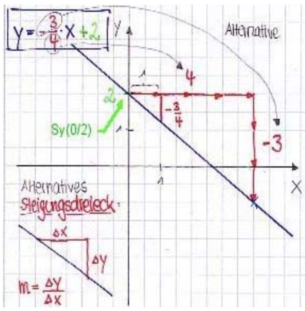


b) g: y = $-\frac{3}{4}$ x + 2

(1) b=2, also $S_y(0|2)$ auf der y-Achse markieren.

(2) $m = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{+4}$

4 Einheiten nach rechts (positive x-Richtung), 3 Einheiten nach unten (negative y-Richtung).

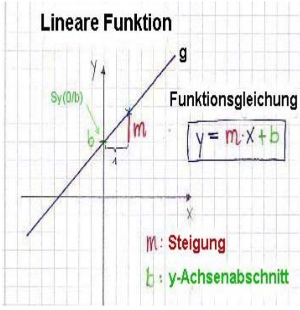


Erläuterung

Der Graf einer linearen Funktion

Eine Funktion f mit der Gleichung f(x) = mx + b (m, b ∈ R) heißt „lineare Funktion“. Ihr Graph ist eine Gerade.

Zeichnen: Zum Zeichnen einer linearen Funktion benötigt man 2 Punkte. Den ersten liefert der **y-Achsenabschnitt**: $S_y(0|b)$, weitere Punkte erhält man mit Hilfe der **Steigung m**. Es empfiehlt sich, mit mindestens drei Punkten zu arbeiten, damit man eventuelle Fehler oder Ungenauigkeiten sofort erkennt.



Ablauf:

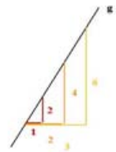
(1) Markiere den y-Achsenabschnitt b auf der y-Achse: $S_y(0|b)$

(2) Zeichne die Steigung m mit Hilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks ein. Bewege dich von S_y aus zuerst in x-, dann in y-Richtung.

Tipp!
Schreibe den Steigungswert immer als Bruch!

Auch ganze Zahlen kann man als Bruch schreiben:

$$m = 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

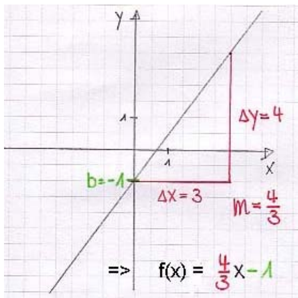


---

2. Lies aus der Grafik die Gleichung der Funktion ab.

g: **f(x) = $\frac{4}{3}$ x – 1**

Tipp!
Wähle möglichst sauber abzulesende Punkte!

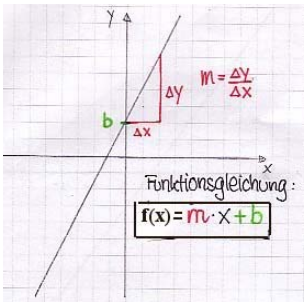


Ablesen: Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion kann man aus dem Grafen ablesen.

Ablauf:

(1) Der **y-Achsenabschnitt b** liefert den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse: $S_y(0 | b)$

(2) Die **Steigung m** erhält man durch ein geeignetes Steigungsdreieck, welches sich aus zwei Punkten konstruieren lässt.



---

3. Berechne den Funktionswert an der Stelle x_o.

f(x) = 3x – 2 (x_o = -5 ; 2)	f(-5)=3·(–5)–2=17 => P(-5 | -17)	f(2) = 3·2–2= 4 => P(2 | 4)

Man berechnet den y- oder Funktionswert, indem man den jeweiligen x-Wert in den Funktionsterm einsetzt. Dadurch erhält man die vollständigen Koordinaten des Punktes: P(x_o | y_o) oder auch P(x_o | f(x_o)).

---

4. Liegt der Punkt auf der Geraden g?

g: y = 2x – 5   <u>A(-2 | -9) ∈ g?</u> (x_P, y_P)

-9 = 2·(-2) - 5

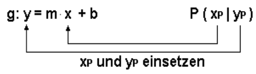
-9 = -9 (wahr) => A ∈ g, d.h. A liegt auf der Geraden.

g: y = 2x – 5   <u>B(3 | -1) ∈ g?</u> (x_P, y_P)

-1 = 2·3 - 5

-1 = +1 (falsch) => B ∉ g, B liegt nicht auf der Geraden.

Punktprobe:
(s.a. S.xx)



1. Erhält man durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes in die Funktionsgleichung eine wahre Aussage, so erfüllen sie die Funktionsgleichung: der Punkt liegt auf dem zugehörigen Grafen.
2. Ist die Aussage widersprüchlich, so liegt der Punkt nicht auf dem Grafen.

Aufgabe & Lösung

Erläuterung

5. Stelle mit Hilfe der Steigung m und dem Punkt P eine Geradengleichung auf:

$P(\overset{x_P}{6} \mid \overset{y_P}{19})$, $m = 2$

$g: y = m \cdot x + b$

$19 = 2 \cdot 6 + b \quad \Rightarrow b = 7$

$g: y = 2x + 7$

$P(\overset{x_P}{5} \mid \overset{y_P}{-9})$, $m = -\frac{3}{4}$

$g: y = m \cdot (x - x_P) + y_P$

$g: y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 5) + (-9)$

$g: y = -\frac{3}{4}x - \frac{21}{4}$

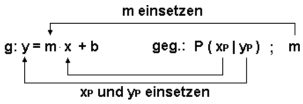
Geradengleichung ermitteln

Gesucht: Geradengleichung in Normalform g: y=mx+b

Gegeben: Steigung und Punkt

Steigung und Punkt legen eine Gerade eindeutig fest.

Setze die bekannten Werte in die Geradengleichung ein und berechne den y-Achsenabschnitt b:



Oder notiere die Geradengleichung mit der **„Punkt-Steigungsform“** g: $\mathbf{y = m(x - x_P) + y_P}$.

---

6. Stelle mit Hilfe der zwei Punkte $P_1(1|-2)$ und $P_2(5|6)$ eine Geradengleichung auf:

Erste Methode: „Steigungsformel“

(1) Steigung m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-2)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$

(2) y-Achsenabschnitt b: m=2 und einen Punkt, z.B. $P_2(5 \mid 6)$ in g einsetzen.

$g: y = m \cdot x + b$

$6 = 2 \cdot 5 + b \quad \Rightarrow b = -4$

$\Rightarrow \quad g: y = 2 \cdot x - 4$

Zweite Methode: „Zwei-Punkte-Form“ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{y-(-2)}{x-1} = \frac{6-(-2)}{5-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y+2}{x-1} = \frac{8}{4} \quad \Rightarrow \quad g: y = 2x - 4$

Dritte Methode: Lineares Gleichungssystem

(1) $P_1(1 \mid -2) \in g$: $-2 = m \cdot 1 + b$

$P_2(5 \mid 6) \in g$: $\underline{6 = m \cdot 5 + b}$

$-8 = -4m \quad \Rightarrow \quad m = 2$

(2) y-Achsenabschnitt b berechnen

$6 = 2 \cdot 5 + b \quad \Rightarrow \quad b = -4 \quad \Rightarrow \quad g: y = 2 \cdot x - 4$

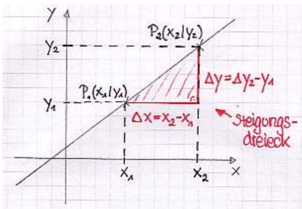
Gegeben: zwei Punkte

Durch zwei Punkte ist eine Gerade eindeutig festgelegt.

Erste Methode: **„Steigungsformel“**

(1) Die Steigung m erhält man durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte in den **Differenzenquotienten**.

$\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathbf{y_2 - y_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}}$



(2) Den y-Achsenabschnitt b bestimmt man durch Einsetzen der Steigung m und der Koordinaten einer der beiden Punkte in die Geradengleichung.

Zweite Methode: **„Zwei-Punkte-Form“**

Notiere die Geradengleichung mit der **„Zwei-Punkte-Form“** g: $\mathbf{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}$

Dritte Methode: **Lineares Gleichungssystem**

(1) Die Koordinaten der beiden Punkte jeweils in die Geradengleichung g: y = m·x + b einsetzen. Man erhält zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (m und b). Dieses 2,2-Gleichungssystem lässt sich immer durch einfache Subtraktion der beiden Gleichungen lösen: b fällt heraus!

(2) y-Achsenabschnitt b berechnen (s. erste Methode)

---

7. Gebe die Geradengleichung der Parallelen an, die durch P(3|7) läuft?

$g_1: y = 2x + 5$

$g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = 2$

$g_2: y = m_2 \cdot x + b$

$7 = 2 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow b = 1$

$g_2: y = 2x + 1$

Parallele und Normale ermitteln

Zwei Geraden sind parallel, wenn ihre Steigungen gleich sind:

$g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

---

8. Gebe die Geradengleichung der Normalen an, die durch P(-4|-3) läuft?

$g_1: y = 2x + 5$

$g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$

$g_2: y = m_2 \cdot x + b$

$-3 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + b \Rightarrow b = -1$

$g_2: y = -\frac{1}{2}x - 1$

Zwei Geraden g_1, g_2 stehen senkrecht aufeinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen „-1“ ergibt:

$g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_\perp = -\frac{1}{m}$.

Eine Gerade, die senkrecht (= orthogonal) auf einer anderen Geraden steht, bezeichnet man als ihre **Normale**.

Aufgabe & Lösung

9. Gib den Steigungswinkel der Geraden an:

g_1: f(x) = $\frac{3}{4}$ x + 1 $m_1 = \frac{3}{4}$ => α_1=arctan($\frac{3}{4}$) ≈ 36,9°

Steigungswinkel werden auf eine Nachkommastelle gerundet.

g_2: f(x) = $-\frac{1}{2}$x + 4 $m_2 = -\frac{1}{2}$ =>α'_2=arctan($-\frac{1}{2}$)≈-26,6°

α'<0=>neg.Drehsinn α_2=180°+(-26,6°)=153,4°

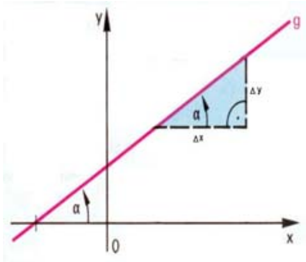
g_3: f(x) = 2 Eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, hat die Steigung null: $m = \frac{0}{\Delta x} = 0$

g_4: x = 5 Für eine Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft, macht der Steigungsbegriff keinen Sinn, da tan(90°) bzw. $m = \frac{\Delta y}{0}$ nicht definiert ist:. Eine Gerade, parallel zur y-Achse hat keine Steigung

Erläuterung

Steigungswinkel

Unter dem Steigungswinkel α (0°≤|α|<180°) einer Geraden versteht man den Winkel, den die positive x-Achse und die Gerade einschließen:
α**>0**: pos. Drehung, gegen den Uhrzeigersinn.
α**<0**: neg. Drehung, mit dem Uhrzeigersinn.



Negative Winkelwerte kann man mit 180° ergänzen:
α'<0 => α=180°+α'

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Gegenkathete}(\alpha)}{\text{Ankathete}(\alpha)}$$
$$m = \tan(\alpha)$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan(m)$$

---

10. Berechne den Schnittwinkel der beiden Geraden.

g_1: f(x) = $\frac{3}{4}$ x + 1 $m_1 = \frac{3}{4}$ => α_1=arctan($\frac{3}{4}$) ≈ 36,9°

g_2: f(x) = $-\frac{1}{2}$x + 4 $m_2 = -\frac{1}{2}$

=> α_2=180°-arctan($-\frac{1}{2}$) ≈ -26,6°

δ = 36,9° - 26,6°
= 10,3°

$$\delta = \arctan\left|\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}\right| = 10{,}3°$$

g_3: f(x) = $\frac{3}{2}$ x + 1 $m_3 = \frac{3}{2}$ => α_3=arctan($\frac{3}{2}$) ≈ 56,3°

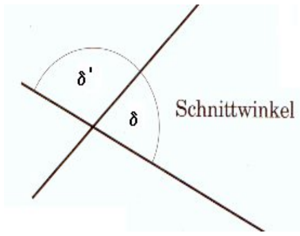
g_4: f(x) = $-\frac{1}{2}$x + 4 $m_2 = -\frac{1}{2}$

=> α_2=180°-arctan($-\frac{1}{2}$) ≈ -26,6°

δ = 56,3° - (- 26,6°)
= 82,9°

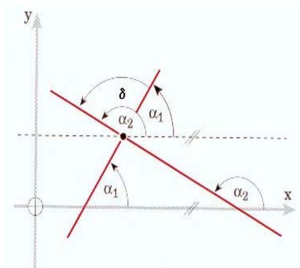
$$\delta = \arctan\left|\frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}\right| = 82{,}9°$$

Schneiden sich 2 Geraden, so bilden sich um den Schnittpunkt 4 Winkel, von denen die gegenüberliegenden gleich groß sind (Scheitelwinkel) und die beiden benachbarten sich zu 180° ergänzen (Nebenwinkel).



Unter dem Schnittwinkel δ versteht man immer den kleineren der beiden Winkel: $\delta \leq$ 90°.

Der Schnittwinkel berechnet sich als Differenz der beiden Steigungswinkel:
$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$



Möchte man sämtliche Probleme mit „falschen“ Steigungs- und Schnittwinkel umgehen, empfiehlt sich die Anwendung der Formel (s.a. S.x, A17).

$$\tan(\delta) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

für $m_1 \cdot m_2 \neq -1$

---

11. Bestimme die Nullstelle der Funktion f(x).

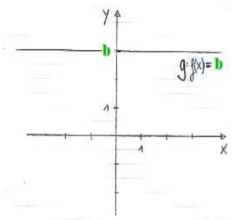
g: f(x) = 2·x – 4

Nullstelle: f(x) = 0

2·x – 4 = 0 | + 4
2·x = 4 | : 2
x_N = 2 => N(2 | 0)

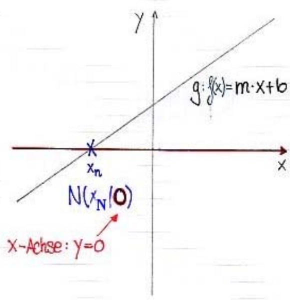
g: f(x) = 5

Die konstante Funktion f(x) = b (m=0, b ≠ 0) hat keine Nullstelle, weil der Graf parallel zur x-Achse verläuft.



Die Nullstelle einer Funktion f(x) ist die x-Koordinate des gemeinsamen Punktes N(x_N | 0) von Funktionsgraf und x-Achse.

Man berechnet die Nullstelle, indem man den Funktionsterm f(x) gleich Null setzt und dann nach x auflöst.



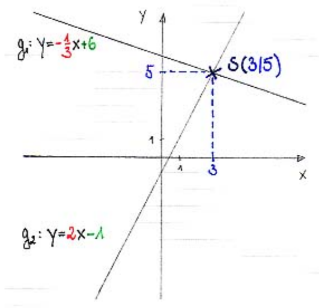
Jede affine Funktion f(x) = m·x + b besitzt für m ≠ 0 genau eine Nullstelle: N($-\frac{b}{m}$ | 0)

Aufgabe & Lösung

12. Bestimme die relative Lage der Geraden.

a) g_1: y = $-\frac{1}{3}\cdot x + 6$ g_2: y = $2\cdot x - 1$

Zeichnerisch:



=> $g_1 \cap g_2 = \{ (3 \mid 5) \}$

b) g_1: y = $-\frac{1}{3}\cdot x + 6$ g_2: y = $2\cdot x - 1$

Zeichnerisch:

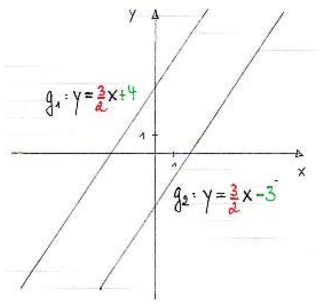
g_2 nach y umstellen :

$2y = 3\cdot x - 6 \quad | :2$

$y = \frac{3}{2}\cdot x - 3$

g_2: $y = \frac{3}{2}\cdot x - 3$

=> $g_1 \parallel g_2$



c) g_1: $2\cdot x - 4y = -12$ g_2: $-x + 2y = 6$

Zeichnerisch:

g_1 nach y umstellen:

$2\cdot x - 4y = -12 \quad | -2\cdot x$

$-4y = -2\cdot x - 12 \quad | :(-4)$

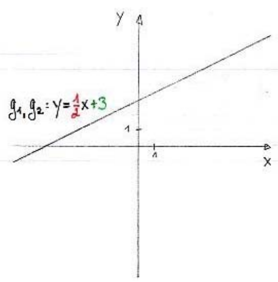
g_1: $y = \frac{1}{2}\cdot x + 3$

g_2 nach y umstellen:

$-x + 2\cdot y = 6 \quad | + x$

$2\cdot y = x + 6 \quad | : 2$

g_2 : $y = \frac{1}{2}\cdot x + 3$



=> $g_1 = g_2$

Erläuterung

a) g_1: y = $-\frac{1}{3}\cdot x + 6$ g_2: y = $2\cdot x - 1$

Rechnerisch: Gleichsetzungsverfahren

$-\frac{1}{3}\cdot x + 6 = 2\cdot x - 1 \quad | -2\cdot x -6$

$-\frac{7}{3}\cdot x = -7 \quad | \cdot (-\frac{3}{7})$

$x = 3$

x = 3 in g_1 oder g_2 einsetzen: $y = 2\cdot 3 - 1 = 5$

=> **L** = { (3 | 5) }, d.h. ein gemeinsamer Punkt

a) g_1: y = $-\frac{1}{3}\cdot x + 6$ g_2: y = $2\cdot x - 1$

Rechnerisch: Einsetzungsverfahren

$2\cdot(\frac{3}{2}\cdot x + 4) = 3\cdot x - 6 \mid T$

$3\cdot x + 8 = 3\cdot x - 6 \mid -3x$

$8 = -6$ ↯ (falsche Aussage)

=> **L** = { }
=> kein gemeinsamer Punkt
=> d.h. die Geraden sind parallel

c) g_1: $2\cdot x - 4y = -12$ g_2: $-x + 2y = 6$

Rechnerisch: Additionsverfahren

$$\left| \begin{array}{l} 2\cdot x - 4y = -12 \\ -x + 2y = 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \end{array} \quad +$$

$$0 = 0 \qquad \text{(wahre Aussage)}$$

=> **L** = $\{ (x \mid y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid (x \mid \; y = \frac{1}{2}\cdot x + 3) \}$

=> unendlich viele gemeinsame Punkte,
d.h. die Geraden sind identisch